ОТЧЕТ

По расчетно-графической работе

на тему:

«Основы гидроупругости и аналитической гидромеханики»

Нижний Новгород

2022 г.

Содержание

Постановка задачи

Вариант 5

Уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид:

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0,$$

где EI – изгибная жесткость стержня, m – распределенная масса, Р – сжимающая нагрузка.

1. Проверить операторы задачи на самосопряженность в случае, когда один конец стержня шарнирно закреплен, а другой не может поворачиваться, а в остальном свободен: $y(x,t)\big|_{x=0}=0$, $\frac{d^2 y(x,t)}{dx^2}\Big|_{x=0}=0$, $\frac{dy(x,t)}{dx}\Big|_{x=l}=0$, $\frac{d^3 y(x,t)}{dx^3}\Big|_{x=l}=0$ (l – длина стержня)..

2. При отсутствии сжимающей нагрузки и заданных в пункте 1 граничных условиях поставить задачу проблемы нахождения собственных значений и собственных форм деформации. Найти первые три собственных значения и соответствующие им формы деформации.

Найти первые три формы деформации в полиномиальном виде из условий согласования с граничными условиями и условиями ортонормированности форм и построить их график. Провести сравнительный анализ этих форм с формами, полученными из задачи на проблему собственных значений, используя метод среднего квадратичного отклонения в n узловых точках (n=1000).

Для наглядности соответствующие формы деформации, полученные разными подходами, должны быть изображены на одном графике.

3. При заданных в пункте 1 граничных условиях найти критическое значение сжимающей нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости.

Уравнение поперечных колебаний трубопровода с постоянным потоком несжимаемой жидкости имеет вид:

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+Mv^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+2Mv\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x\,\partial t}+(m+M)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0,$$

где EI – изгибная жесткость трубопровода, m – распределенная масса трубопровода, M – распределенная масса жидкости.

Оба конца трубопровода жестко закреплены: $y(x,t)\big|_{x=0}=y(x,t)\big|_{x=l}=0$, $\frac{dy(x,t)}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{dy(x,t)}{dx}\Big|_{x=l}=0$ (l – длина трубопровода).

Поставить задачу проблемы нахождения собственных значений и собственных форм деформации для упрощенной задачи в случае отсутствия движения жидкости. Найти первые три собственных значения и соответствующие им формы деформации.

Найти первые три формы деформации в полиномиальном виде (пример выполнения https://e-learning.unn.ru/mod/page/view.php?id=223843) из условий согласования с граничными условиями и условиями ортонормированности форм и построить их график. Провести сравнительный анализ этих форм с формами, полученными из задачи на проблему собственных значений, используя метод среднего квадратичного отклонения в n узловых точках (n=1000).

Для наглядности соответствующие формы деформации, полученные разными подходами, должны быть изображены на одном графике.

Проверить операторы задачи на самосопряженность и положительноопределенность.

Найти критическое значение скорости потока жидкости, при которой происходит потеря устойчивости (методом Бубнова-Галеркина).

Решение

1. *Проверка на самосопряженность*

Матричный оператор:

$$A = m + M$$

Оператор демпфирования:

$$B = 2Mv\frac{\partial}{\partial x}$$

Оператор жесткости:

$$C = EI\frac{\partial^4}{\partial x^4} + Mv^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Так как оператор A выражен константами, то условие самосопряженности выполняется автоматически:

$$\int_0^l uAvdx = ¿\int_0^l vAudx\, ¿$$

Проверим на самосопряженность оператор B с помощью условия:

$$\int_0^l (uBv - vBu)\,dx = ¿\int_0^l \left(u\left(2Mvv^I\right) - v\left(2Mvu^I\right)\right)dx = 0\, ¿$$

Интегрирование по частям слагаемых:

$$\int_0^l u2Mvv^I\,dx = 2Mv\, ¿¿$$

В случае, когда оба конца трубопровода жестко закреплены оба слагаемые обращаются в нуль за счет обращения в нуль Y и первых производных от функций сравнения. Отсюда следует, что B – не самосопряженное.

Проверим на самосопряженность оператор C с помощью условия:

$$\int_0^l (uCv - vCu)\,dx = \int_0^l u(¿\,EIv^{IV} + Mv^2v^{II}) - v(EIu^{IV} + Mv^2u^{II})¿\,dx = 0$$

Интегрирование по частям слагаемых:

$$\int_0^l uEIv^{IV}dx = EI\, ¿¿$$

$$\int_0^l vEIv^{IV}dx = EI\, ¿¿$$

$$\int_0^l u M v^2 v^{II} dx = M v^2 \int_0^l u d v^I = M v^2 ¿¿¿$$

$$\int_0^l v M v^2 u^{II} dx = M v^2 \int_0^l v d u^I = M v^2 ¿$$

Тогда получаем:

$$\int_0^l (uCv - vCu) dx = EI \left(u v^{III l}{}_0 ¿ - u^I v^{II l}{}_0 - v u^{III l}{}_0 + v^I u^{II l}{}_0\right) + M v^2 \left(u v^{I l}{}_0 - v u^{I l}{}_0\right) ¿$$

В случае закрепления, когда оба конца трубопровода жестко закреплены, первое и третье слагаемые обращаются в нуль за счет обращения в нуль Y и третьих производных от функций сравнения. Второе и четвертое слагаемые обращаются в нуль за счет обращения в нуль первых и вторых производных от функций сравнения. Пятое и шестое слагаемые обращаются в нуль за счет обращения в нуль Y и первых производных от функции сравнения. Отсюда следует, что C – самосопряженное.

Проведем проверку положительности операторов.

$$\int_D^{\square} uLudD \geq 0$$

В случае оператора A для функции сравнения u имеем:

$$\int_l^0 u(m+M) udx = ¿(m+M) \int_l^0 u^2 dx \geq 0 ¿$$

то есть оператор A положительный.

В случае оператора B имеем:

$$\int_l^0 u\left(2 M v u^I\right) dx = ¿ 2 M v \left(u u_0^l\right) - 2 M v \int_0^l uudx ¿$$

тогда видно, что из-за последнего слагаемого в общем случае оператор B не является положительным.

В случае оператора C имеем:

$$\int_l^0 u\left(EI u^{IV} + M v^2 u^{II}\right) dx = ¿ EI \left(u u^{III l}{}_0 - u^I u^{II l}{}_0\right) + M v^2 \left(u u^{II}{}_0\right) + EI \int_0^l u^{II} u^{II} dx - M v^2 \int_0^l u^I u^I dx ¿$$

тогда видно, что из-за последних двух слагаемых в общем случае оператор C не является положительным.

2. *Проблема собственных значений*

Уравнение движения трубопровода имеет вид:

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+Mv^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+2Mv\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x\partial t}+(m+M)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0$$

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+(Mv^2+P)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+2Mv\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x\partial t}+(m+M)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+\xi\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=0 \quad (*)$$

Запись задачи в безразмерном виде:

Поделив уравнение (*) на EI/l^4 и проведя замену переменных $x=l\phi\ \ (0\le\phi\le 1),\ t=\sqrt{\frac{m}{EI}}l^2\tau$, получим уравнение движения в безразмерных параметрах:

$$\frac{\partial^4 y(\phi,\tau)}{\partial\phi^4}+b\frac{\partial^2 y(\phi,\tau)}{\partial\phi^2}+2a\frac{\partial^2 y(\phi,\tau)}{\partial\phi\partial\tau}+\delta\frac{\partial y(\phi,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial^2 y(\phi,\tau)}{\partial\tau^2}=0.$$

Здесь $\delta=\frac{\xi l^2}{EI}\sqrt{\frac{EI}{m+M}}$, $a=\frac{Mvl}{EI}\sqrt{\frac{EI}{m+M}}$, $b=\frac{Mv^2l^2}{EI}=a^2\frac{M+m}{M}$.

Для постановки задачи на проблему собственных значений рассмотрим случай отсутствия движения жидкости по трубопроводу, сжимающей нагрузки и потерь на трение. Тогда уравнение примет вид:

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+(m+M)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0.$$

Переобозначим параметр, отвечающий за общую массу:

$m_{об}=(m+M)$.

В этом случае решение задачи на проблему собственных значений будет идентичен случаю сжатого стержня.

Замена переменных:

$$x=l\varphi,$$
$$0\le\varphi\le l,$$
$$t=T\tau$$
$$T=l^2\sqrt{\frac{m_{об}}{EI}}$$

Уравнение движения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^4 y(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^4}+\frac{\partial^2 y(\varphi,\tau)}{\partial\tau^2}=0$$

Граничные условия:

$$y(\varphi,\tau)\big|_{\varphi=0}=0,\ y(\varphi,\tau)\big|_{\varphi=1}=0,\ \frac{dy(\varphi,\tau)}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=0}=0,\ \frac{dy(\varphi,\tau)}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=1}=0$$

Подставим решение в виде: $y(\varphi,\tau)=Y(\varphi)\,T(\tau)$

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial\varphi^4}T(\tau)+\frac{\partial^2 T(\tau)}{\partial\tau^2}Y(\varphi)=0$$

$$\frac{\dfrac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial\varphi^4}}{Y(\varphi)}=-\left(\frac{\dfrac{\partial^2 T(\tau)}{\partial\tau^2}}{T(\tau)}\right)=\lambda$$

$$\lambda-\text{константа}$$

Задача на проблему собственных значений:

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial\varphi^4}-\beta^4 Y(\varphi)=0\,,\ где\ \beta^4=\lambda(1)$$

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial\varphi^4}-\lambda\,Y(\varphi)=0$$

$$Y(\varphi)_{\varphi=0}=0\,;\ Y(\varphi)_{\varphi=1}=0$$

$$\frac{dY(\varphi)}{d\varphi}_{\varphi=0}=0\,;\ \frac{dY(\varphi)}{d\varphi}_{\varphi=1}=0 \qquad (2)$$

Задача для определения зависимости от времени поведения собственных мод деформаций:

$$\frac{\partial^2 T_j(\tau)}{\partial\tau^2}+\lambda_j T_j(\tau)=0$$

Ищем решение задачи (1)-(2) в виде: $Y(\varphi)=A\,e^{ik\varphi}(3)$

После подстановки (3) в уравнение (1) для нахождения собственных значений k получим:

$$k^4-\beta^4=0\,;$$

$$k_{1,2}=\pm i\,\beta\,;$$

$$k_{3,4}=\pm\beta\,;$$

Используя формулы Эйлера, общее решение (3) преобразуется:

$$Y(\varphi) = C_1 \sin(\beta\varphi) + C_2 \cos(\beta\varphi) + C_3\, sh(\beta\varphi) + C_4\, ch(\beta\varphi) \quad (4)$$

Для нахождения коэффициентов C_i(i=1,2,3,4) выражения (4) используем краевые условия (2):

Получим систему:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 \sin(\beta) + C_2 \cos(\beta) + C_3\, sh(\beta) + C_4\, ch(\beta) = 0 \\ C_1 + C_3 = 0 \\ C_1 \cos(\beta) - C_2 \sin(\beta) + C_3\, ch(\beta) + C_4\, sh(\beta) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Получили систему линейных алгебраических однородных уравнений, для нетривиального решения которой необходимо обращение в 0 ее определителя.

Вычислим его:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & sh(\beta) & ch(\beta) \\ \cos(\beta) & -\sin(\beta) & ch(\beta) & sh(\beta) \end{vmatrix} = 2 - 2\cos(\beta)\, ch(\beta)$$

В итоге получаем:

$$\cos(\beta) * ch(\beta) = 1 \quad (6)$$

Численно решая (6) получаем:

$$\beta_1 = 4,73\,;\ \beta_2 = 7{,}8532\,;\ \beta_3 = 10{,}9956$$

Найдем коэффициенты C_i для 1 случая:

$$C_4 = 1\ C_2 = -1$$

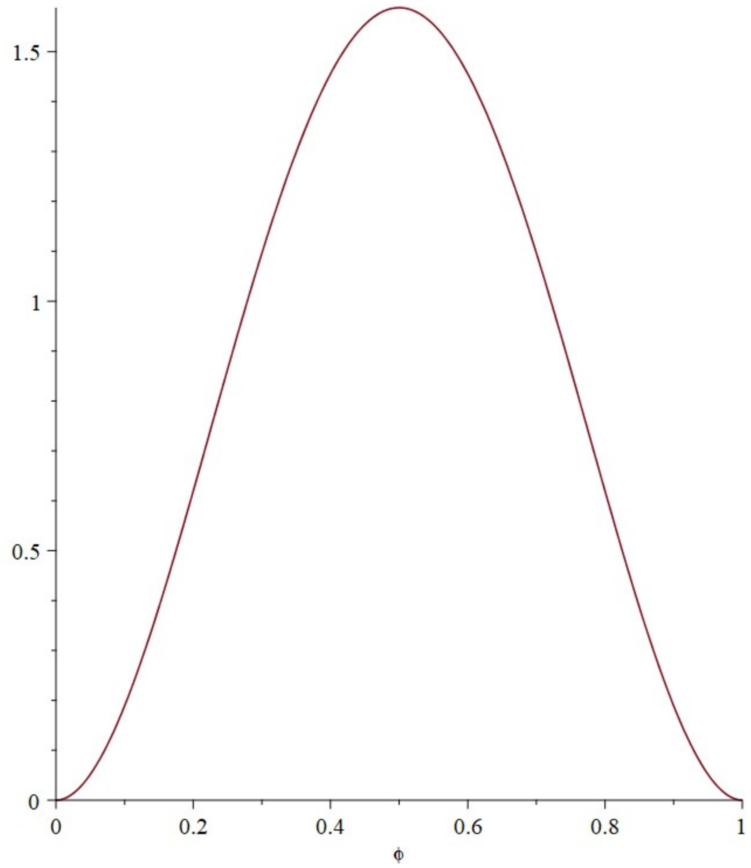
$$C_1 + C_3 = 0$$

$$C_1 \sin(4,73) - \cos(4,73) + C_3\, sh(4,73) + ch(4,73) = 0$$

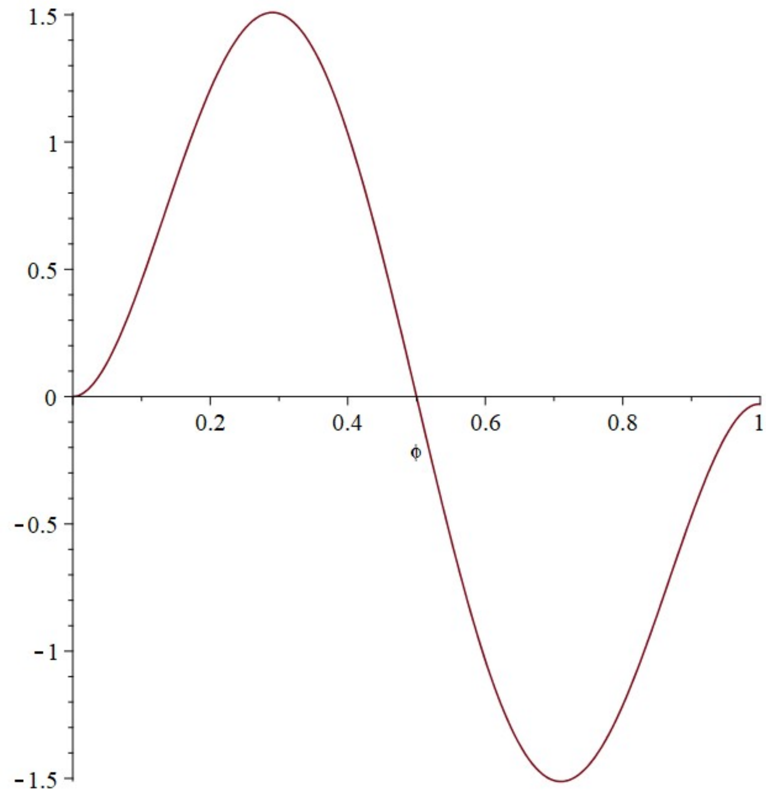
$$C_1 = 0.9825\ C_3 = -0.9825$$

Тогда

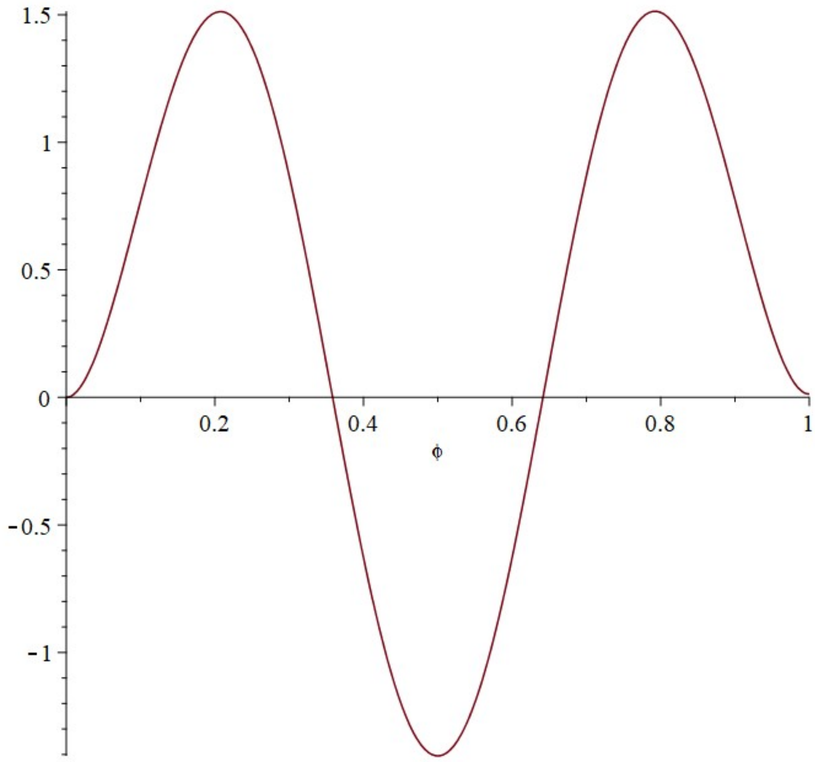
$$Y_1(\varphi) = 0.9825 \sin(4,73\varphi) - \cos(4,73\varphi) - 0.9825\, sh(4,73\varphi) + ch(4,73\varphi)$$



$Y_2(\varphi)=1.0008\sin(7{,}8532\varphi)-\cos(7{,}8532\varphi)-1.0008\,sh(7{,}8532\varphi)+ch\,(7{,}8532\varphi)$



$Y_3(\varphi)=0.999966\sin(10{,}9956\varphi)-\cos(10{,}9956\varphi)-0.999966\,sh(10{,}9956\varphi)+ch\,(10{,}9956\varphi)$



Для приведения форм к нормированному виду найдем нормирующий множитель α_iиз условия нормированности форм:

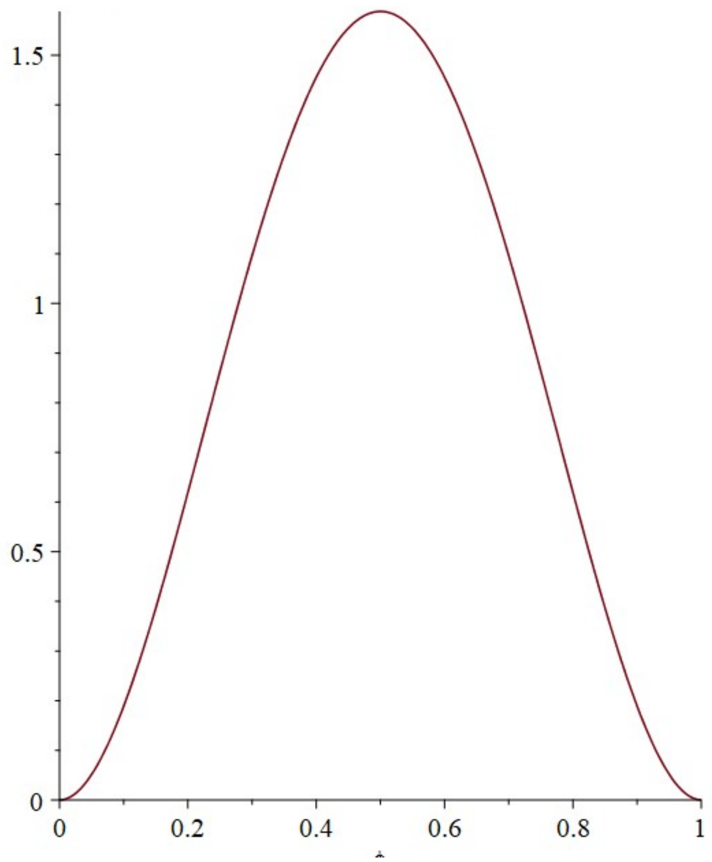
$$\int_0^1 \left(\alpha_i Y ¿¿ i(\varphi)\right)^2 d\varphi = 1 ¿$$

Получаем:

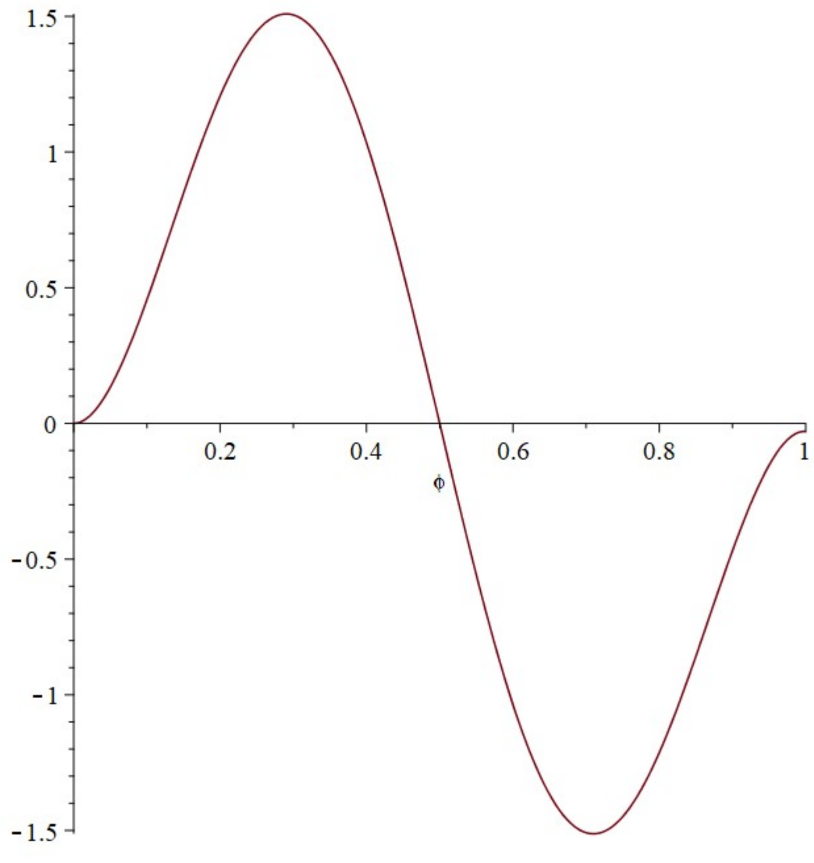
$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \left(Y ¿¿ i(\varphi)\right)^2 d\varphi ¿}}$$
$$\alpha_1 = 0.999982433904722$$
$$\alpha_2 = 0.998118862695376$$
$$\alpha_3 = 0.999386037259572$$

Тогда нормированные формы примут вид:

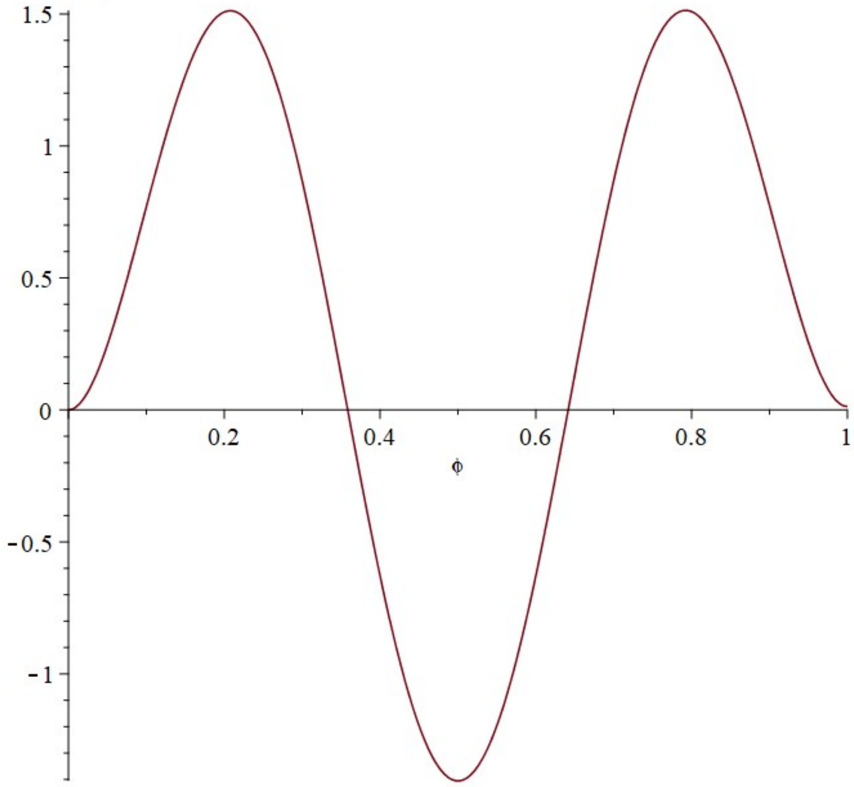
$$Y_1(\varphi) = 0.999982433904722 * (0.9825 \sin(4,73\varphi) - \cos(4,73\varphi) - 0.9825\, sh(4,73\varphi) + ch(4,73\varphi))$$



$$Y_2(\varphi)=0.998118862695376*(1.0008\sin(7{,}8532\,\varphi)-\cos(7{,}8532\,\varphi)-1.0008\,sh(7{,}8532\,\varphi)+ch\,(7{,}8532\,\varphi))$$



$Y_3(\varphi)=0.999386037259572*(0.999966\sin(10{,}9956\,\varphi)-\cos(10{,}9956\,\varphi)-0.999966\,sh(10{,}9956\,\varphi)+ch\,(10{,}9$



Найдем функции сравнения в полиномиальном виде. Будем искать набор из трех полиномов, удовлетворяющих граничным условиям и обладающих свойством ортонормированности. Полиномы должны иметь степень не ниже четвертой.

Для нахождения коэффициентов полиномов будем решать систему, полученную из граничных условий и условий ортонормированности:

$$\int_0^1 y_i(x)\cdot y_j(x)\,dx=\begin{cases}1\,,\, если\, i=j\\ 0\,,\, если\, i\neq j\end{cases}$$

В итоге получаем следующие уравнения для первых трех форм в полиномиальном виде:

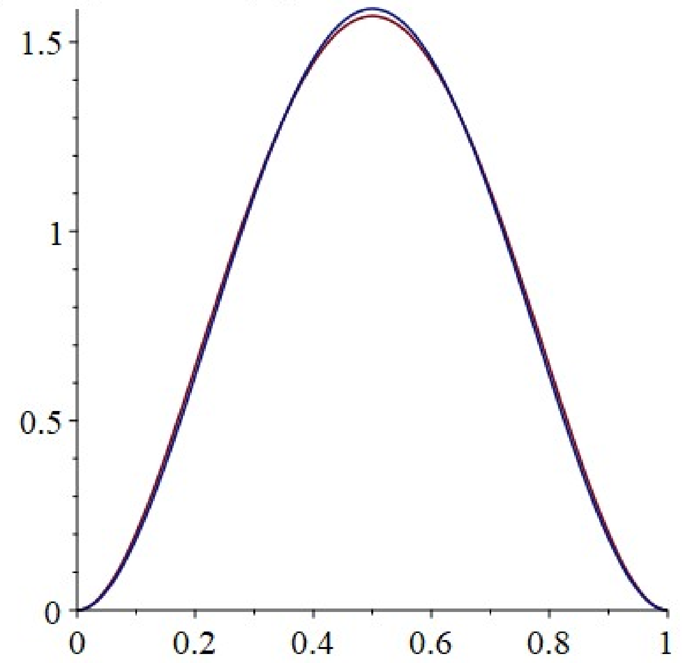
$$Y_1^n=25.09980080\,x^4-50.19960159\,x^3+25.09980080\,x^2$$

$$Y_2^n=-166.4932431\,x^5+416.2331078\,x^4-332.9864862\,x^3+83.24662155\,x^2$$

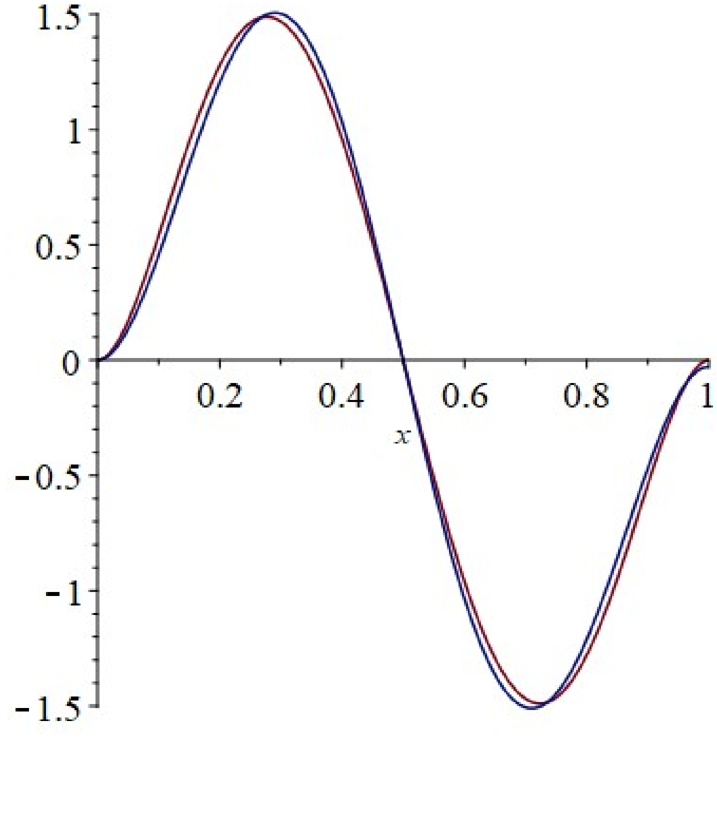
$$Y_3^n=890.3886792\,x^6-2671.166037\,x^5+2873.527099\,x^4-1295.110805\,x^3+202.361063\,x^2$$

Ниже представлены графики для наглядного сравнения полученных полиномов с соответствующими тремя нормированными функциями Крылова. (Красный – полиномы, синий – функции Крылова)

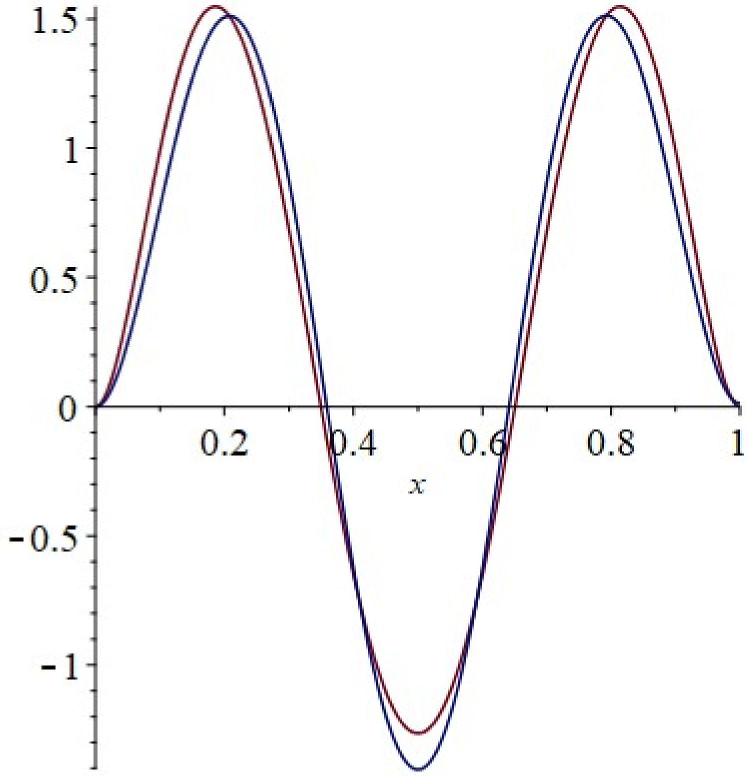
$plot([pl1, kr1], x = 0..1,);$



$plot([pl2, kr2], x = 0..1,);$



$plot([pl3, kr3], x = 0 ..1,);$



Для того, чтобы оценить отличие форм, полученных при помощи полиномов, от форм, полученных при помощи функций Крылова, посчитаем среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_1 = 0.01505491626$$
$$\sigma_2 = 0.05966601411$$
$$\sigma_3 = 0.1352136084$$

3. Проблема собственных значений

Наше уравнение, описывающее колебания нашего стержня в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^4 y(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^4}+\alpha\frac{\partial^2 y(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 y(\varphi,\tau)}{\partial\tau^2}=0$$

Где α – нагрузка.

Решение задачи будем искать в следующем виде: где $y(\varphi,\tau)=\sum_i X_i(\varphi)T_i(\tau)$ – полная система ортонормированных базисных функций.

Проведем стандартную процедуру метода Бубнова-Галеркина с учетом условий ортонормированности. Представив общее решение в виде $y(\varphi,\tau)=\sum_{i=1}^{n} X_i(\varphi)T_i(\tau)$, подставим его в уравнение движения системы:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i(\tau)\frac{\partial^4 X_i(\varphi)}{\partial\varphi^4}+\alpha\sum_{i=1}^{n} T_i(\tau)\frac{\partial^2 X_i(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 T_i(\tau)}{\partial\tau^2}X_i(\varphi)=0$$

Поочередно умножив полученное выражение на набор базисных функций $X_j(\varphi),\ j=1\ldots n$ и проитегрировав по координате φ, получим систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_{ji}T_i(\tau)+\alpha\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ji}T_i(\tau)+\frac{\partial^2 T_i(\tau)}{\partial\tau^2}=0$$

Где $\beta_{ji}=\int_0^1\frac{\partial^4 X_i(\varphi)}{\partial\varphi^4}X_j(\varphi)d\varphi$ и $\gamma_{ji}=\int_0^1\frac{\partial^2 X_i(\varphi)}{\partial\varphi^2}X_j(\varphi)d\varphi$, ¿, $j=1\ldots 2$

В случае двухмодового приближения получаем систему:

¿

Запишем для нее характеристическое выражение:

$$\begin{bmatrix} p^2+\beta_{11}+\alpha\gamma_{11} & \beta_{21}+\alpha\gamma_{21} \\ \beta_{12}+\alpha\gamma_{12} & p^2+\beta_{22}+\alpha\gamma_{22}\end{bmatrix}=0$$

В итоге характеристическое выражение имеет вид:

$$p^4+A_2p^2+A_4=0$$

Где

$$A_2=\beta_{11}+\beta_{22}+\alpha(\gamma_{11}+\gamma_{22}),$$

$$A_4=\alpha^2(\gamma¿¿11\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21})+\alpha(\beta_{11}\gamma_{22}+\beta_{22}\gamma_{11}-\beta_{21}\gamma_{12}-\beta_{12}\gamma_{21})+\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}¿$$

При использовании критерия Рауса-Гурвица обращаются в нули детерминанты. Полученное при проводимом в настоящей работе исследовании при нулевом трении значение критической нагрузки соответствует границе «квазиустойчивости» и требует проверки.

Квадраты корней характеристического уравнения имеют вид:

$$p^2=\frac{-A_2\pm\sqrt{A_2^2-4A_4}}{2}$$

Потеря устойчивости происходит в одном из двух случаев:

1) Числитель имеет действительное значение, и при этом $-A_2\pm\sqrt{A_2^2-4A_4}>0$
2) Числитель имеет комплексную часть, то есть $A_2^2-4A_4<0$

$X_1^{IV}=491.7784491*\sin(4.73\varphi)-500.5378618*\cos(4.73\varphi)-491.7784491*sh(4.73\varphi)+500.5378618*ch$
$X_2^{IV}=3799.410262*\sin(7.8532\varphi)-3796.373164*\cos(7.8532\varphi)-3799.410262*sh(7.8532\varphi)+3796.373$
$X_1^{II}=-21.98098812*\sin(4.73\varphi)+22.37250699*\cos(4.73\varphi)-21.98098812*sh(4.73\varphi)+22.37250699*c$
$X_2^{II}=-61.60598072*\sin(7.8532\varphi)+61.55673533*\cos(7.8532\varphi)-61.60598072*sh(7.8532\varphi)+61.5567$

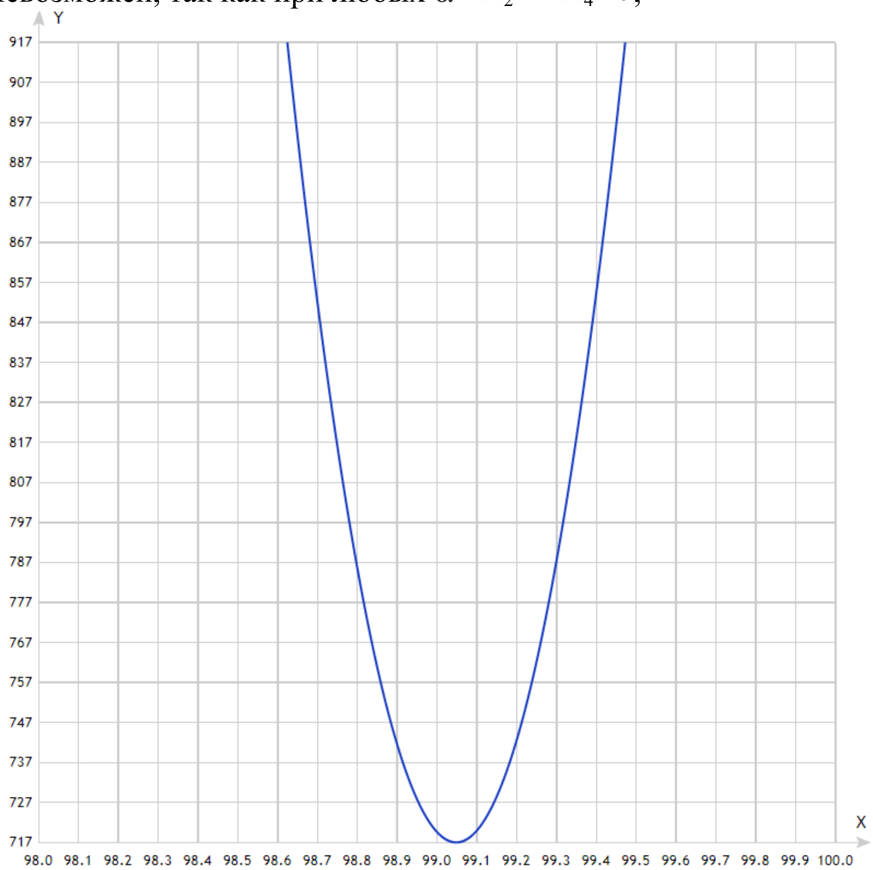
Отсюда:

$\beta_{11}=500.5466552\ \beta_{12}=-0.6488236340\ \beta_{21}=-4.930208749\ \beta_{22}=3803.528083$
$\gamma_{11}=-12.30141044\ \gamma_{12}=-0.07748424652\ \gamma_{21}=-0.07750746545\ \gamma_{22}=-45.64765907$

$A_2=\beta_{22}+\alpha\gamma_{22}+\beta_{11}+\alpha\gamma_{11}=-57.94906951*\alpha+4304.074738$
$A_4=\alpha^2(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{21}\gamma_{12})+\alpha(\gamma_{11}\beta_{22}+\gamma_{22}\beta_{11}-\gamma_{21}\beta_{12}-\gamma_{12}\beta_{21})+\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}=561.5245842*\alpha^2-69637.9754$

$$2*p^2=57.94906951*\alpha-4304.074738+\sqrt{1111.996320*\alpha^2-220282.3506*\alpha+1.090969911*10^7}$$

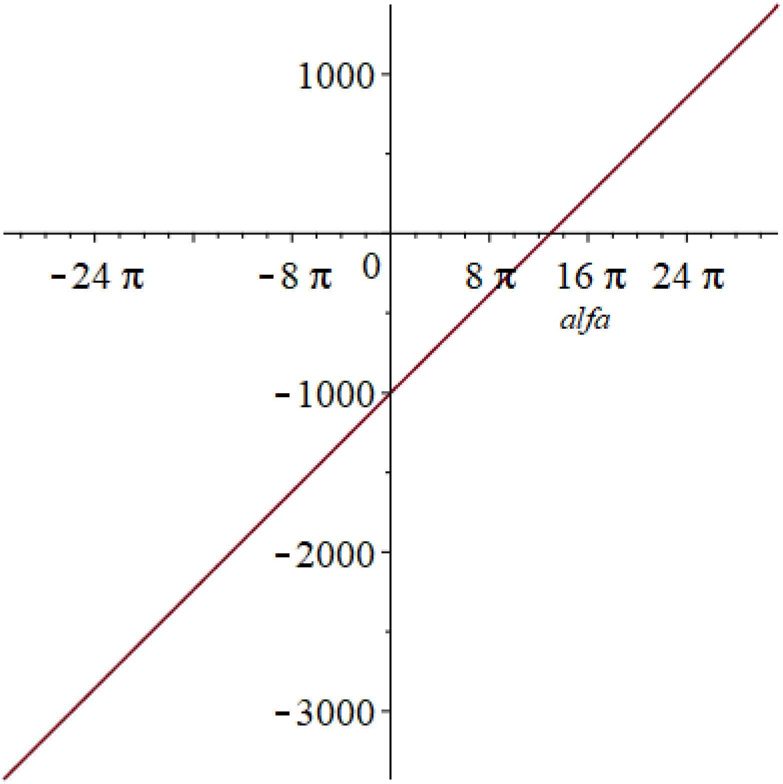
1) Числитель имеет действительное значение, и при этом $-A_2\pm\sqrt{A_2^2-4A_4}>0$
   $57.94906951*\alpha-4304.074738+\sqrt{1111.996320*\alpha^2-220282.3506*\alpha+1.090969911*10^7}>0$
   $\alpha>42.00000005$
2) Числитель имеет комплексную часть, то есть $A_2^2-4A_4<0$
   Невозможен, так как при любых α $A_2^2-4A_4>0$;



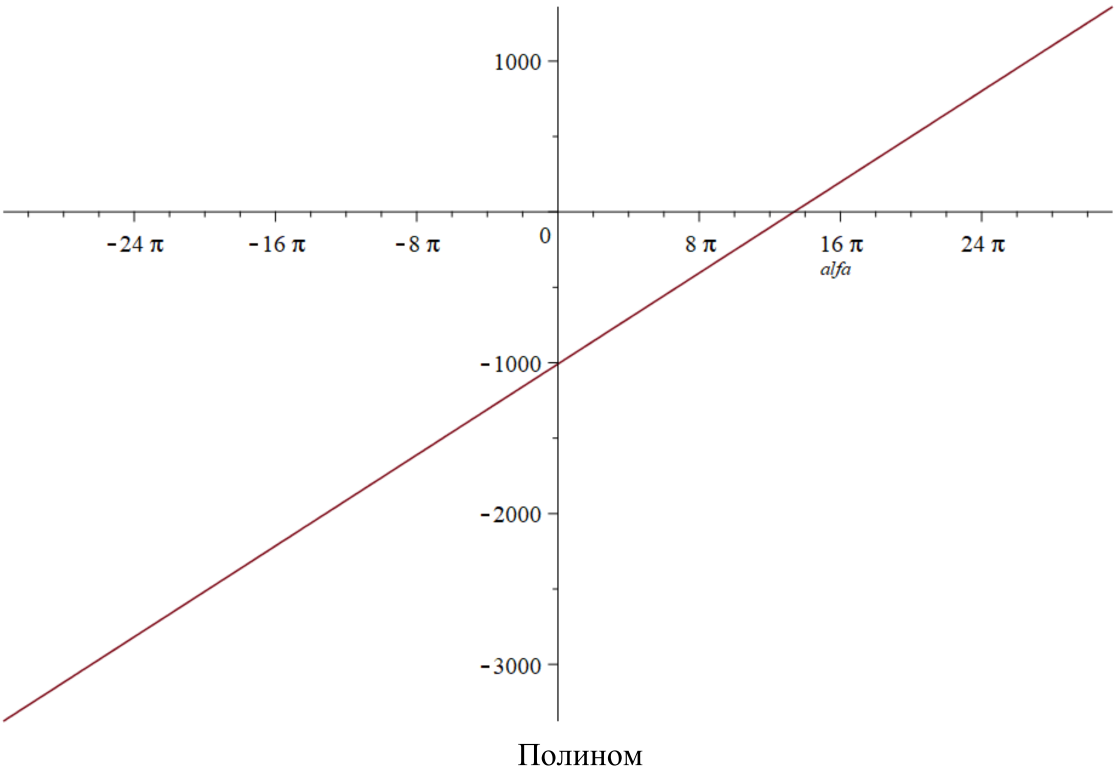
Система устойчива при

$\alpha \leq 42.00000005$

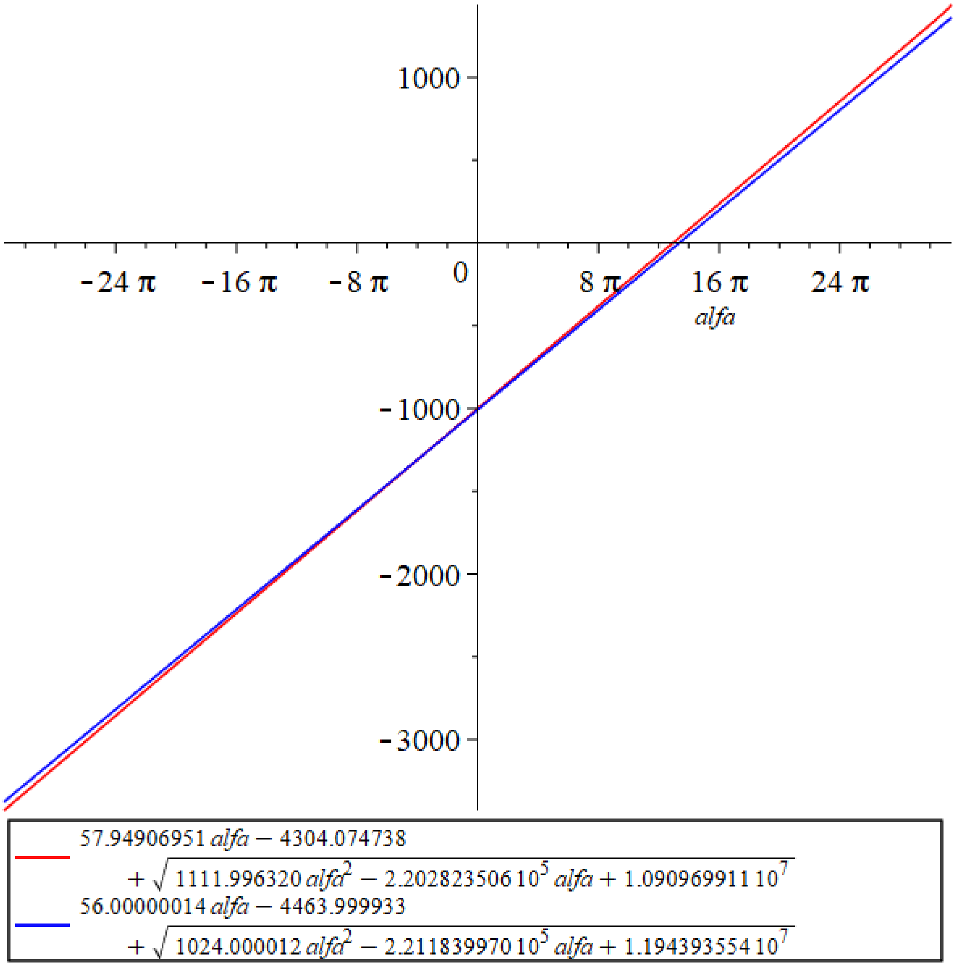
$P \leq 42.00000005 \dfrac{EI}{l^2}$



Ф. Крылова



Полином


1000
-1000
-2000
-3000
-24 π
-16 π
-8 π
0
8 π
16 π
24 π
alfa
57.94906951 alfa − 4304.074738 + √(1111.996320 alfa² − 2.202823506 10⁵ alfa + 1.090969911 10⁷)
56.00000014 alfa − 4463.999933 + √(1024.000012 alfa² − 2.211839970 10⁵ alfa + 1.194393554 10⁷)

Сравнение